Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Alexander Krauss

WS 2007/08
31. 1. 2008

Perlen der Informatik
11. Übung

Aufgabe G11.1 Fixpunkt-Induktion

Wir betrachten Zeichenketten über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Die Menge $L \subseteq \Sigma^*$ ist induktiv definiert durch folgende zwei Regeln:

$$\frac{}{\epsilon \in L} \qquad \frac{w \in L}{\mathtt{a}w\mathtt{b} \in L}$$

a) Zeigen Sie per Induktion, dass $L \subseteq \{a^n b^n \mid n \; setN\}$. *Das ist nicht schwer, aber es ist ein formal sauberer Beweis gefragt.*

b) Interpretieren Sie die induktive Definition von L als kleinsten Fixpunkt nach Knaster-Tarski: Wie lautet die zugehörige Funktion f?

c) Ihrem Induktionsbeweis aus a) liegt ein allgemeines Induktionsprinzip für kleinste Fixpunkte zugrunde. Formulieren und beweisen Sie dieses Prinzip.

Aufgabe G11.2 Fixpunkte von stetigen Funktionen

Eine Funktion $f : 2^A \to 2^A$ heißt *stetig*, wenn gilt

- f ist monoton
- Für jede Folge von Mengen $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \ldots$ gilt

$$f(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(M_n)$$

Zeigen Sie: Wenn f stetig ist, dann ist $\mathrm{fix}(f) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(\emptyset)$ der kleinste Fixpunkt von f.

Aufgabe G11.3

Was halten Sie von folgenden induktiven Definitionen?

a) $X \subseteq \mathbb{Z}$ ist definiert durch

$$\frac{}{0 \in X} \qquad \frac{x \in X}{x+1 \in X} \qquad \frac{\forall z > 0.\ z \in X}{-1 \in X}$$

b) $A \subseteq \mathbb{N}$ ist definiert durch

$$\frac{n+1 \notin A}{n \in A} \qquad \frac{n \notin A}{n+1 \in A}$$