

Aufgabe H1.1 Hilberts Hotel

Stellen Sie sich ein Hotel mit abzählbar unendlich vielen Zimmern vor. Selbst wenn in diesem Hotel alle Zimmer belegt sind, kann immer noch Platz für einen neu ankommenden Gast geschaffen werden. Hierfür muss jeder der anwesenden Gäste von Zimmer n in Zimmer $n + 1$ umziehen. Der neu angekommene Gast wird dann in Zimmer 0 untergebracht. Stellen Sie sich nun vor, dass jeden Tag eine abzählbar unendliche Anzahl von Gästen ankommt, die im Hotel untergebracht werden muss.

- Wie kann man die Gäste so geschickt auf die Zimmer verteilen, dass keiner der bereits untergebrachten Gäste umziehen muss?
- Bekommt die Hotelleitung ein Problem, wenn plötzlich an einem Tag abzählbar unendlich viele Busse mit jeweils abzählbar unendlich vielen Gästen ankommen?

Aufgabe H1.2 Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. M ist abzählbar.
2. Die Menge $\mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$ aller endlichen Teilmengen von M ist abzählbar.
3. Die Menge M^* aller endlichen Wörter über M ist abzählbar.
4. Jede echte Teilmenge $N \subset M$ ist abzählbar.