Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Dr. Clemens Ballarin

Gleichungslogik und Lambda-Kalkül
Wintersemester 2007/08
Musterlösung zu Übungsblatt 9

Aufgabe 1

- Sei $E = \{f(g(f(x))) \approx x\}$

  Aus der Gleichung in E ergibt sich die Regel:

  $(1) \quad f(g(f(x))) \quad \to \quad x$

  Diese hat ein kritisches Paar mit sich selbst:

$$\begin{array}{lll} & & g(f(x)) \\ & \underset{(1)}{\nearrow} & \\ 1+1: \quad f(g(f(g(f(x))))) & & \\ & \underset{(1)}{\searrow} & \\ & & f(g(x)) \end{array}$$

  Das kritische Paar hat kein gemeinsames Redukt, und es ergibt sich eine zweite Regel:

  $(2) \quad g(f(x)) \quad \to \quad f(g(x))$

  Die Regeln (1) und (2) haben zwei kritische Paare:

$$\begin{array}{lll} & & x \\ & \underset{(1)}{\nearrow} & \\ 1+2: \quad f(g(f(x))) & & \\ & \underset{(2)}{\searrow} & \\ & & f(f(g(x))) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} & & g(x) \\ & \underset{(1)}{\nearrow} & \\ 1+2: \quad g(f(g(f(x)))) & & \\ & \underset{(2)}{\searrow} & \\ & & f(g(g(f(x)))) \xrightarrow{(2)} f(g(f(g(x)))) \xrightarrow{(1)} g(x) \end{array}$$

  Das erste kritische Paar führt zu der neuen Regel (3). Das zweite kritische Paar hat ein gemeinsames Redukt und führt deshalb zu keiner neuen Regel.

  $(3) \quad f(f(g(x))) \quad \to \quad x$

  Die Regeln (1) und (3) haben zwei kritische Paare:

$$\begin{array}{lll} & & f(g(x)) \\ & \underset{(1)}{\nearrow} & \\ 1+3: \quad f(g(f(f(g(x))))) & & \\ & \underset{(3)}{\searrow} & \\ & & f(g(x)) \end{array}$$

$$
1+3: \quad f(f(g(f(x)))) \quad
\begin{array}{l}
\nearrow_{(1)} \; f(x) \\
\searrow_{(3)} \; f(x)
\end{array}
$$

Beide führen zu keinen neuen Regeln.

Die Regeln (2) und (3) haben zwei kritische Paare:

$$
2+3: \quad g(f(f(g(x)))) \quad
\begin{array}{l}
\nearrow_{(2)} \; f(g(f(g(x)))) \xrightarrow{(1)} g(x) \\
\searrow_{(3)} \; g(x)
\end{array}
$$

$$
2+3: \quad f(f(g(f(x)))) \quad
\begin{array}{l}
\nearrow_{(3)} \; f(x) \\
\searrow_{(2)} \; f(f(f(g(x)))) \xrightarrow{(3)} f(x)
\end{array}
$$

Auch diese führen nicht zu neuen Regeln. Damit terminiert das Vervollständigungsverfahren mit der Regelmenge

$$R = \{f(g(f(x))) \to x,\ g(f(x)) \to f(g(x)),\ f(f(g(x))) \to x\}$$

und es gilt $\approx_R = \approx_E$.

Aufgabe 2

a) **Voraussetzung**: R ist linear, keine kritischen Paare
zu zeigen: R ist konfluent

Beweis:

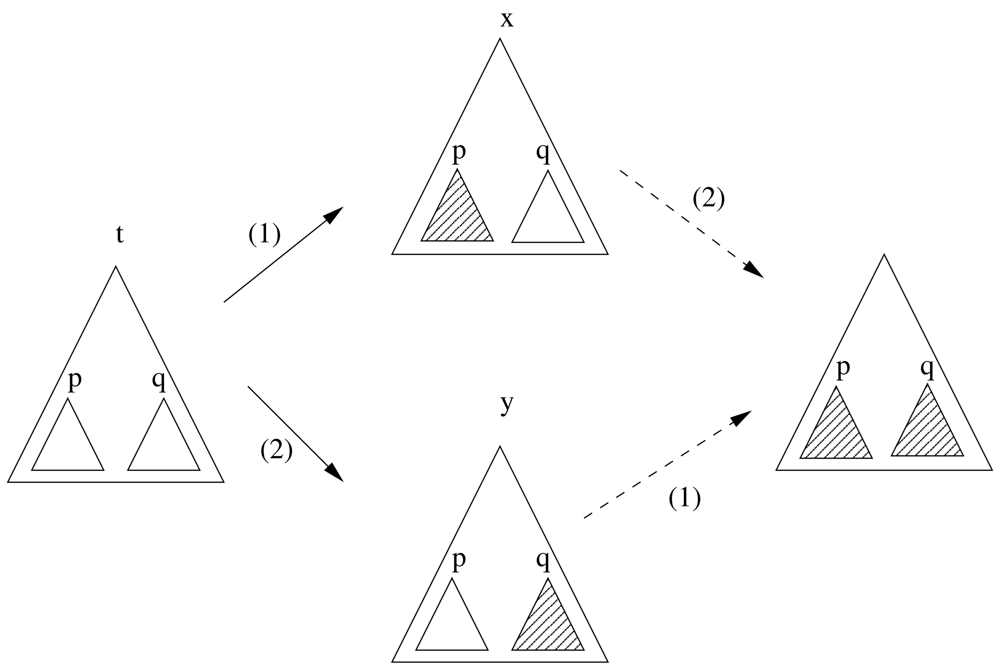
Wir zeigen, dass für zwei beliebige Regeln

$$
\begin{aligned}
(1): &\quad l_1 \to r_1 \\
(2): &\quad l_2 \to r_2
\end{aligned}
$$

aus R gilt: $x \overset{(1)}{\leftarrow} t \overset{(2)}{\to} y \;\Rightarrow\; \exists z.\ x \overset{=}{\to} z \overset{=}{\leftarrow} y$
Damit ist R stark konfluent, also auch konfluent.

Sei p der Ansatzpunkt von Regel (1) und q der Ansatzpunkt von Regel (2) in einem Term t.
Es gilt entweder $p \mid\mid q,\ p \geq q$ oder $q \geq p$.

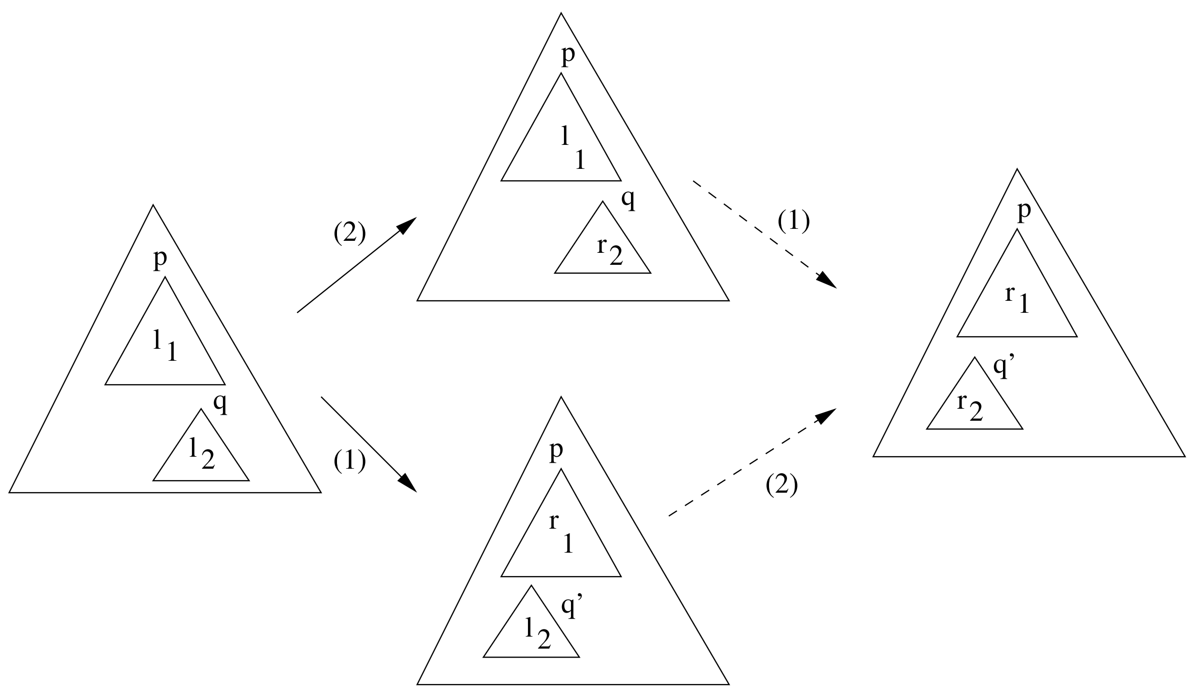
Der Fall $p \mid\mid q$ ist unproblematisch.



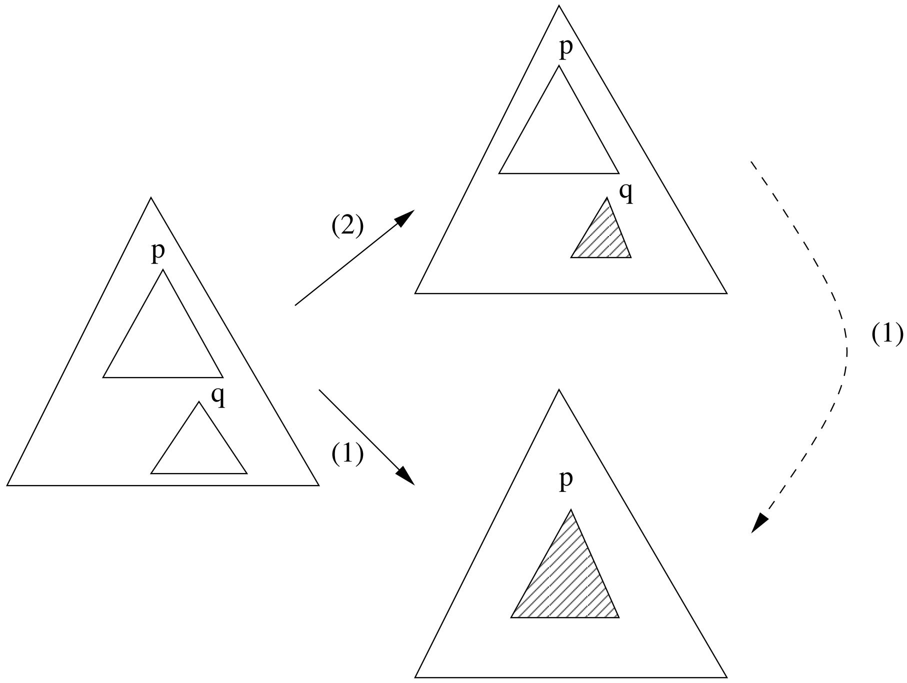
O.B.d.A genügt es $p \leq q$ zu betrachten.

Da R keine kritischen Paare besitzt, liegt die Position q unterhalb des von l_1 gematchten Bereichs in t.

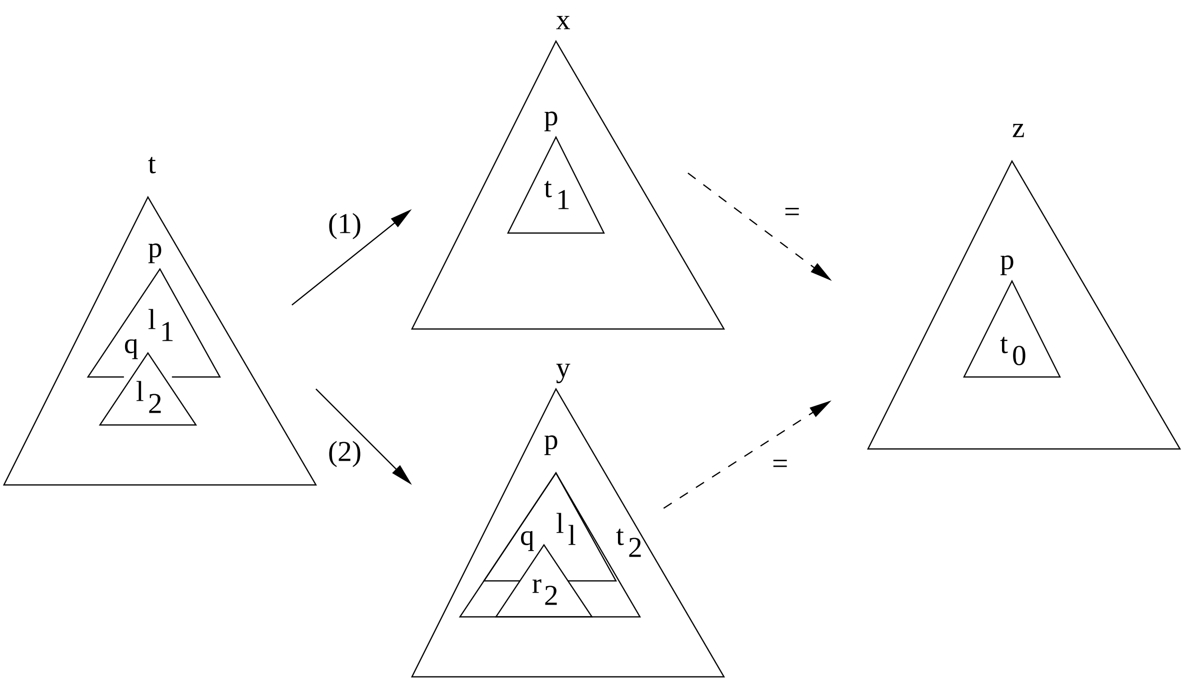
Da R linear ist und insbesondere also alle linken und rechten Seiten jede Variable höchstens einmal enthalten, kann die Anwendung einer Regel $l_1 \to r_1$ die Anwendungsstelle q der Regel $l_2 \to r_2$ nur zu höchstens einem q' verschieben.



Enthält r_1 die entsprechende Variable nicht, so kann die Regel $l_2 \to r_2$ nicht angewendet werden. Es gilt dann aber:



b) Zu den beiden Fällen aus Aufgabe (a) kommt nun noch der Fall $p < q$ bei einem kritischen Paar hinzu. Nach Voraussetzung gibt es aber zu jedem kritischen Paar (t_1, t_2) ein t_0 mit $t_1 \overset{=}{\to} t_0 \overset{=}{\leftarrow} t_2$:



Aufgabe 3

R ist nicht konfluent. Es gilt:

$$g(c) \to f(c, g(c)) \to f(g(c), g(c)) \to a$$

und

$$g(c) \to g(g(c)) \to g(f(c, g(c))) \to g(f(g(c), g(c))) \to g(a)$$

- a ist in Normalform.
- Es gibt keine Reduktion von $g(a)$ nach a:

  Die einzig mögliche Reduktion von $g(a)$ ist nach $f(a, g(a))$. Die einzige auf diesen Term anwendbare Reduktion ergibt $f(a, f(a, g(a)))$. Auch hier und bei allen Folgetermen ist nur eine Reduktion möglich. Insbesondere kann deshalb a nicht hergeleitet werden.

Es gibt also kein t mit $a \xrightarrow{*} t \xleftarrow{*} g(a)$.

Aufgabe 4

$E_2 := \{f(g(f(x))) \approx f(g(x))\}$

Vervollständigung liefert eine Aufzählung aller Regeln der Form ($n \geq 1$):

$$f(g^n(f(x))) \to f(g^n(x)) \qquad (r_n)$$

und terminiert nicht.
(Bemerkung: Wenn man eine Regel in die andere Richtung aufnehmen würde, also $f(g^n(x)) \to f(g^n(f(x)))$ bekommt man sofort eine nichtterminierende Relation $\to$: $f(g^n(x)) \to f(g^n(f(x))) \to f(g^n(f(f(x)))) \to \dots$)

Beweis: Betrachte die Menge

$$R_n = \{r_1, \dots, r_n\}.$$

R_1 enthält die gerichtete Gleichung aus E_2. Betrachte alle kritischen Paare von Regeln in $R_n, n \geq 1$. Für r_i und $r_j \in R_n$ sind $f(g^i(f(g^j(f(x)))))$ und $f(g^j(f(g^i(f(x)))))$ die Terme, die zu kritischen Paaren führen. O.B.d.A. betrachten wir nur $f(g^i(f(g^j(f(x)))))$.

$$\begin{tikzcd}
 & f(g^{i+j}(f(x))) \\
f(g^i(f(g^j(f(x))))) \arrow[ur, "(r_i)"] \arrow[dr, "(r_j)"'] & \\
 & f(g^i(f(g^j(x)))) \xrightarrow{(r_i)} f(g^{i+j}(x))
\end{tikzcd}$$

Wenn $i + j \leq n$, ist dies mit der Regel $r_{i+j} \in R_n$ zu einem gemeinsamen Redukt zusammenführbar, sonst ergibt sich die neue Regel r_{i+j}. Nach betrachten aller kritischen Paare von R_n erhält man also die Regelmenge R_{2n}.

Aufgabe 5

$$\begin{array}{lllll}
(1) & x \cdot 1 & \to & x \\
(2) & 1 \cdot x & \to & x \\
(3) & i(x) \cdot (x \cdot y) & \to & y
\end{array}$$

Im folgenden sind nur die kritischen Paare aufgeführt die nicht zusammengeführt werden können.

$$1+3: \quad i(x)\cdot(x\cdot 1) \begin{array}{l} \overset{}{\underset{(1)}{\nearrow}} \quad i(x)\cdot x \\ \\ \underset{(3)}{\searrow} \quad 1 \end{array}$$

(4) $\quad i(x)\cdot x \quad \to \quad 1$

$$2+3: \quad i(1)\cdot(1\cdot x) \begin{array}{l} \underset{(2)}{\nearrow} \quad i(1)\cdot x \\ \\ \underset{(3)}{\searrow} \quad x \end{array}$$

[(5) $\quad i(1)\cdot x \quad \to \quad x$]

$$1+4: \quad i(1)\cdot 1 \begin{array}{l} \underset{(1)}{\nearrow} \quad i(1) \\ \\ \underset{(4)}{\searrow} \quad 1 \end{array}$$

(6) $\quad i(1) \quad \to \quad 1$ (Diese Regel eliminiert 5.)

$$3+4: \quad i(i(x))\cdot(i(x)\cdot x) \begin{array}{l} \underset{(3)}{\nearrow} \quad x \\ \\ \underset{(4)}{\searrow} \quad i(i(x))\cdot 1 \to i(i(x)) \end{array}$$

(7) $\quad i(i(x)) \quad \to \quad x$

$$3+6: \quad i(1)\cdot(1\cdot y) \begin{array}{l} \underset{(3)}{\nearrow} \quad y \\ \\ \underset{(6)}{\searrow} \quad 1\cdot(1\cdot y) \to y \end{array}$$

$$3+7: \quad i(i(x))\cdot(i(x)\cdot y) \begin{array}{l} \underset{(3)}{\nearrow} \quad y \\ \\ \underset{(7)}{\searrow} \quad x\cdot(i(x)\cdot y) \end{array}$$

(8) $\quad x\cdot(i(x)\cdot y) \quad \to \quad y$

$$4+7: \quad i(i(x))\cdot i(x) \begin{array}{l} \underset{(4)}{\nearrow} \quad 1 \\ \\ \underset{(7)}{\searrow} \quad x\cdot i(x) \end{array}$$

(9) $\quad x\cdot i(x) \quad \to \quad 1$