

Aufgabe 1

Gegeben ist die Polynominterpretation P_f von f

$$P_f(x, y) = x^2 + xy.$$

Die Terme in der ersten Regel sind

$$l_1 = f(f(x, y), z) \text{ und } r_1 = f(x, f(y, z)).$$

Deren Polynominterpretationen sind

$$P_{l_1}(x, y, z) = (x^2 + xy)^2 + (x^2 + xy)z = x^4 + 2x^3y + x^2y^2 + x^2z + xyz$$

$$P_{r_1}(x, y, z) = x^2 + x(y^2 + yz) = x^2 + xy^2 + xyz$$

Die Terme der zweiten Regel sind

$$l_2 = f(x, f(y, z)) = r_1 \text{ und } r_2 = f(y, y).$$

Deren Polynominterpretationen sind

$$P_{l_2}(x, y, z) = x^2 + xy^2 + xyz \text{ und } P_{r_2}(x, y, z) = 2y^2$$

Zu zeigen:

- $\forall x, y, z \in A. \quad P_{l_1}(x, y, z) \in A \quad \wedge$
 $P_{r_1}(x, y, z) \in A \quad \wedge$
 $P_{l_2}(x, y, z) \in A \quad \wedge$
 $P_{r_2}(x, y, z) \in A$

$$x, y, z \in A \Rightarrow x > 2, y \neq 0, z \neq 0 \quad (1)$$

$$\cdot (1) \Rightarrow P_{l_1}(x, y, z) > 2 \Rightarrow P_{l_1}(x, y, z) \in A$$

$$\cdot (1) \Rightarrow P_{r_1}(x, y, z) > 2 \Rightarrow P_{r_1}(x, y, z) \in A$$

$$\cdot P_{l_2} = P_{r_1}$$

$$\cdot y \in A \Rightarrow y > 2 \Rightarrow P_{r_2}(x, y, z) > 2 \Rightarrow P_{r_2}(x, y, z) \in A$$

- $P_{l_1} >_A P_{r_1} \quad \wedge \quad P_{l_2} >_A P_{r_2}$

$$P_{l_1} >_A P_{r_1} \Leftrightarrow \forall x, y, z \in A. P_{l_1}(x, y, z) - P_{r_1}(x, y, z) > 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y, z > 2 \Rightarrow x^4 + 2x^3y + x^2y^2 + x^2z - x^2 - xy^2 > 0$$

gilt, da $x^2z > x^2$ für $z > 2, x \neq 0$
 und $x^2y^2 > xy^2$ für $x > 2, y \neq 0$

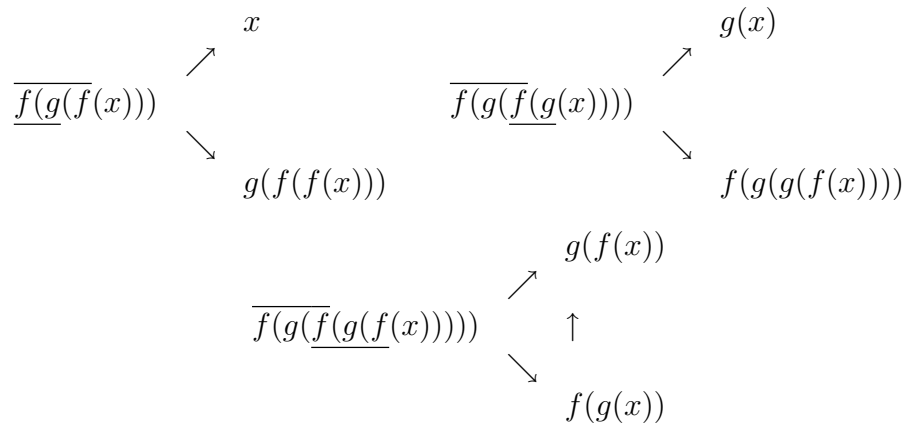
$$P_{l_2} >_A P_{r_2} \Leftrightarrow \forall x, y, z \in A. P_{l_2} > P_{r_2}(x, y, z)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + xy^2 + xyz > 2y^2$$

gilt, da $xy^2 > 2y^2$ für $x > 2$

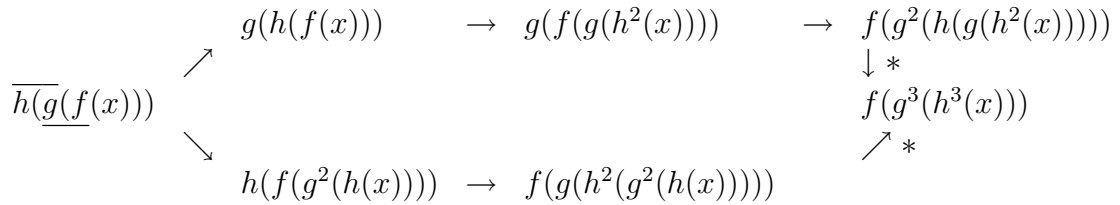
Aufgabe 2

a) Drei kritische Paare:



Nicht lokal konfluent, nicht konvergent.

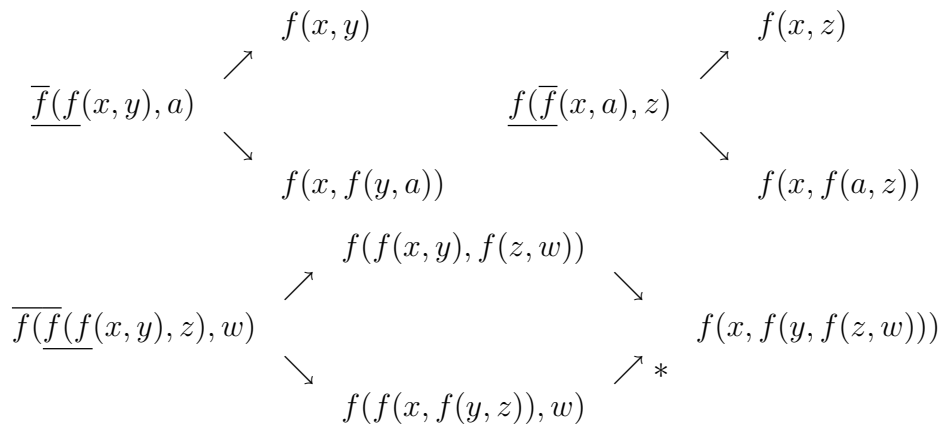
b) Ein kritisches Paar:



Lokal konfluent, terminierend (siehe Blatt 7, Aufgabe 2), also konvergent.

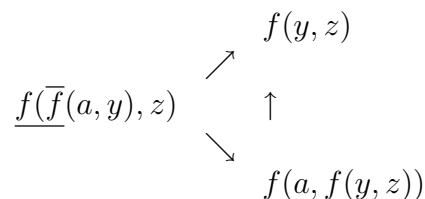
c) Keine kritischen Paare, also lokal konfluent. Terminierend, also konvergent.

d) Drei kritische Paare:



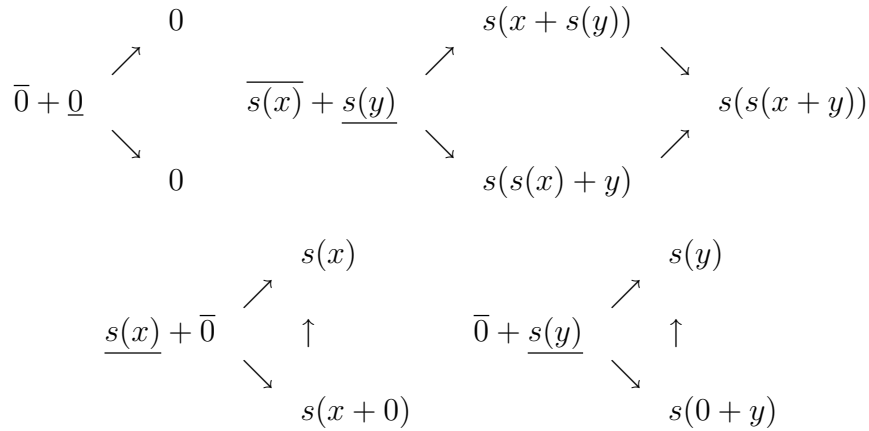
Nicht lokal konfluent, nicht konvergent.

e) Zwei kritische Paare:



Für das zweite kritische Paar siehe vorherige Aufgabe.
 Lokal konfluent, terminierend, also konvergent.

f) Vier kritische Paare:



Lokal konfluent, terminierend, also konvergent.

Aufgabe 3

Ein Reduktionssystem \rightarrow mit der Eigenschaft

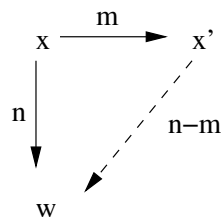
$$y \leftarrow x \rightarrow z \wedge y \neq z \implies \exists u. y \rightarrow u \leftarrow z \quad (1)$$

heißt *uniform konfluent*.

Sei b eine Normalform von a mit zwei Ableitungen $b \xleftarrow{n} a \xrightarrow{m} b$. Es ist zu zeigen, dass $n = m$. Hierzu zeigen wir für beliebige x

$$w \xleftarrow{n} x \xrightarrow{m} x' \wedge w \text{ ist eine Normalform} \implies m \leq n \wedge x' \xrightarrow{n-m} w$$

per Induktion über n .

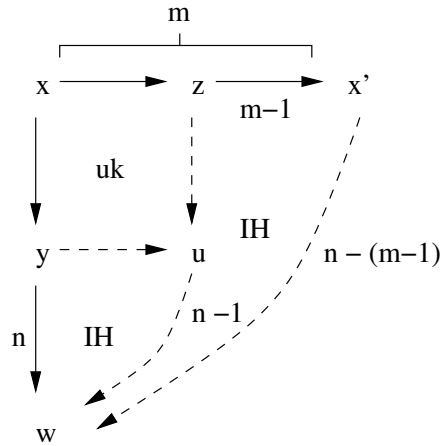


- $n = 0$: Es gilt $w = x$, das heißt x ist eine Normalform, und alle von x ausgehenden Reduktionssequenzen sind von der Länge 0. Also $x = x'$ und $m = 0$.
- $n \rightsquigarrow n + 1$: Es gelte

$$w \xleftarrow{n+1} x \xrightarrow{m} x' \wedge w \text{ ist Normalform von } x$$

Zu zeigen: $m \leq n + 1 \wedge x' \xrightarrow{(n+1)-m} w$

Fallunterscheidung:



- $m = 0$: Dann gilt $x = x'$ und damit sofort $x' \xrightarrow{n+1-0} w$
- $m > 0$: Es gibt y und z mit $w \xleftarrow{n} y \leftarrow x \rightarrow z \xrightarrow{m-1} x'$
 Wenn $y \neq z$, dann gibt es nach (1) ein u mit $y \rightarrow u \leftarrow z$
 Wegen $w \xleftarrow{n} y \rightarrow u$ und da w Normalform gilt nach IH für u :
 $u \xrightarrow{n-1} w$, also $w \xleftarrow{n} z \xrightarrow{m-1} x'$
 und damit wieder nach IH:
 $x' \xrightarrow{n-(m-1)} w \wedge m-1 \leq n$, d.h. $x \xrightarrow{(n+1)-m} w \wedge m \leq n+1$
 Wenn $y = z$ dann wende IH an auf $w \xleftarrow{n} z \xrightarrow{m-1} x'$ an.

Aufgabe 4

Newmans Lemma: Eine terminierende Relation ist konfluent, wenn sie lokal konfluent ist.

Zu zeigen:

Ein lokal konfluentes, aber nicht konfluentes \rightarrow terminiert nicht.

Beweis mit Widerspruch:

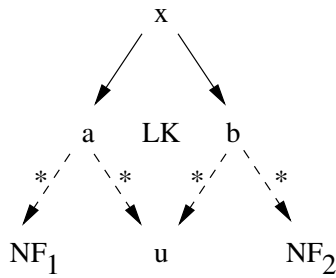
Sei \rightarrow lokal konfluent aber nicht konfluent. Wir nehmen an, dass \rightarrow terminiert.

- nicht konfluent $\Rightarrow \exists x$ mit zwei verschiedenen Normalformen NF_1 und NF_2
- $\Rightarrow x$ besitzt mindestens zwei direkte Nachfolger: $a \leftarrow x \rightarrow b$

Wir zeigen zunächst, dass a oder b selbst wieder zwei unterschiedliche NF besitzen. Dies führt die Annahme der Termination zum Widerspruch, da sich so eine unendlich absteigende Kette von direkten Nachfolgern mit unterschiedlichen NF konstruieren läßt.

Da \rightarrow lokal konfluent ist, gibt es ein u mit $a \xrightarrow{*} u \xleftarrow{*} b$.

Wir betrachten die Normalform(en) dieses Elements u :
 (da \rightarrow nach Annahme terminiert, besitzt u mindestens eine NF)



$$u \xrightarrow{*} \text{NF}_1 : b \xrightarrow{*} \text{NF}_2 \wedge b \xrightarrow{*} u \xrightarrow{*} \text{NF}_1$$

$\Rightarrow b$ hat zwei verschiedene NF

$$u \xrightarrow{*} \text{NF}_2 : a \xrightarrow{*} \text{NF}_1 \wedge a \xrightarrow{*} u \xrightarrow{*} \text{NF}_2$$

$\Rightarrow a$ hat zwei verschiedene NF

$$u \xrightarrow{*} \text{NF}_3 \wedge \text{NF}_1 \neq \text{NF}_3 \neq \text{NF}_2 :$$

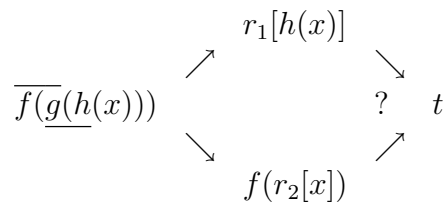
sowohl a als auch b besitzen verschiedene NF

Aufgabe 5

Gegeben: $R = \{f(g(x)) \rightarrow r_1[x], g(h(x)) \rightarrow r_2[x]\}$

Gesucht: r_1, r_2 , so dass R konfluent

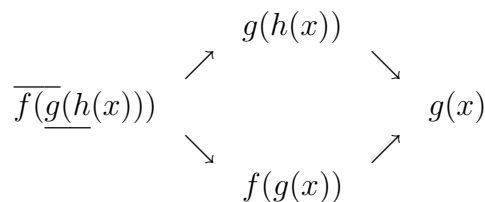
R besitzt ein kritisches Paar:



r_1 und r_2 müssen so gewählt werden, dass gilt:

$$r_1[h(x)] \xrightarrow{*} t \xleftarrow{*} f(r_2[x])$$

Mit $r_1 = g(x)$ und $r_2 = g(x)$ ergibt sich:



Damit ist R konfluent.

Aufgabe 6

a) Wir bestimmen zunächst die kritischen Paare von R :

$$\begin{array}{ccc}
 & & g(g(f(x))) \\
 & \nearrow & \\
 \overline{f(g(f(g(f(x)))))} & & \\
 & \searrow & \\
 & & f(g(g(x)))
 \end{array}$$

$g(g(f(x)))$ und $f(g(g(x)))$ sind irreduzibel, also ist R nicht konfluent.

- b) Da in R gilt $g(g(f(x))) \approx_R f(g(g(x)))$, bietet es sich an, R um die Regel $f(g(g(x))) \rightarrow g(g(f(x)))$ zu erweitern:

$$R' = \{f(g(f(x))) \rightarrow g(x), f(g(g(x))) \rightarrow g(g(f(x)))\}$$

Damit ist R' bezüglich des obigen kritischen Paares konfluent. Es müssen aber nun die neu entstandenen kritischen Paare (es gibt wieder nur eines) betrachtet werden:

$$\begin{array}{ccc}
 & & g(g(g(x))) \\
 & \nearrow & \\
 \overline{f(g(f(g(g(x)))))} & & \uparrow \quad \checkmark \\
 & \searrow & \\
 & & f(g(g(g(f(x)))) \rightarrow g(g(f(g(f(x))))
 \end{array}$$