Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Dr. Clemens Ballarin

Gleichungslogik und Lambda-Kalkül
Wintersemester 2007/08
Musterlösung zu Übungsblatt 3

Aufgabe 1

a) Definition: $\sigma\tau(x) = \hat{\sigma}(\tau(x))$

   i) $\operatorname{Dom}\sigma\tau = \{x\}$, $\sigma\tau = \{x \mapsto y\}$

   ii) $\operatorname{Dom}\sigma\tau = \{x\}$, $\sigma\tau = \{x \mapsto y\}$

   iii) $\operatorname{Dom}\sigma\tau = \{x\}$, $\sigma\tau = \{x \mapsto y + y\}$

b) $\sigma\tau = \tau$, wenn $\mathrm{VRan}(\tau) \cap \mathrm{Dom}(\sigma) = \emptyset$ und $\mathrm{Dom}(\sigma) \subseteq \mathrm{Dom}(\tau)$
$\tau\tau = \tau$, wenn $\mathrm{VRan}(\tau) \cap \mathrm{Dom}(\tau) = \emptyset$,
d.h. τ ist idempotent, wenn τ nur Variablen verändert, die nicht in $\mathrm{VRan}(\tau)$ vorkommen.

Aufgabe 2

Gegeben:

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & x \circ (y \circ z) & \approx & (x \circ y) \circ z \\
(2) & e \circ x & \approx & x \\
(3) & x^{-1} \circ x & \approx & e
\end{array}$$

Zu zeigen: $x \circ e \stackrel{*}{\longleftrightarrow}_G x$

Beweis:

$$\begin{array}{ll}
x \circ e \longleftarrow & \{(3)\} \\
x \circ (x^{-1} \circ x) \longrightarrow & \{(1)\} \\
(x \circ x^{-1}) \circ x \longrightarrow & \{\text{Lemma 1}\} \\
e \circ x \longrightarrow & \{(2)\} \\
x &
\end{array}$$

Lemma 1: $x \circ x^{-1} \stackrel{*}{\longleftrightarrow} e$

Beweis:

$$\begin{array}{ll}
x \circ x^{-1} \longleftarrow & \{(2)\} \\
e \circ (x \circ x^{-1}) \longleftarrow & \{(3)\} \\
(((x^{-1})^{-1} \circ x^{-1}) \circ (x \circ x^{-1})) \longrightarrow & \{(1)\} \\
((x^{-1})^{-1} \circ (x^{-1} \circ (x \circ x^{-1}))) \longleftarrow & \{(1)\} \\
((x^{-1})^{-1} \circ ((x^{-1} \circ x) \circ x^{-1})) \longrightarrow & \{(3)\} \\
((x^{-1})^{-1} \circ (e \circ x^{-1})) \longrightarrow & \{(2)\} \\
((x^{-1})^{-1} \circ x^{-1}) \longrightarrow & \{(3)\} \\
e &
\end{array}$$

□

Aufgabe 3

Gegeben: $V = \{x\} \quad s \longrightarrow_I t \iff s \neq t \ \wedge \ \exists \sigma.\ s = \sigma(t)$

a) **Behauptung**: $\longrightarrow_I$ terminiert.

Beweis:
Sei $\varphi(t) = |\{p | p \in \text{Pos}(t) \wedge t|_p \neq x\}|$ "Anzahl der Funktionssymbole in t"
($\varphi(t) = |t| - |Var(t)|$ funktioniert auch)

Es gilt:

$s \longrightarrow_I t \Rightarrow \varphi(s) > \varphi(t)$, da x das einzige Variablensymbol ist und wegen $s \neq t$ die Substitution σ die Variable x auf einen Term abbilden muss, der mindestens ein Funktionssymbol enthält.
φ ist somit eine Maßfunktion für $\longrightarrow_I$, d.h. $\longrightarrow_I$ terminiert.

Behauptung: $\longrightarrow_I$ ist konfluent.

Beweis:

$\forall t \in \mathrm{T}(\Sigma, \{x\}) \setminus \{x\}.\ t \longrightarrow x \qquad$ (wähle $\sigma = \{x \mapsto t\}$)

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} & t \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & \\ t_1 \arrow[dr, dotted, "*"'] & & t_2 \arrow[dl, dotted, "*"] \\ & x & \end{tikzcd}$$

, d.h. $\longrightarrow_I$ ist konfluent.

□

b) Konfluenz ja (aus einer Variable lässt sich ja nach wie vor jeder beliebige Term erzeugen), aber Terminierung nein, da z.B. gilt: $f(x,y) \longrightarrow_I f(y,x) \longrightarrow_I f(x,y) \longrightarrow_I \dots$ d.h. $\longrightarrow_I$ terminiert nicht mehr.

Aufgabe 4

$$\begin{array}{lcl} M >_{mult} N & \Leftrightarrow & \exists X \subseteq M, Y \in \mathcal{M}(A). \\ & & X \neq \emptyset \ \wedge \ N = (M - X) \cup Y \ \wedge \ \forall y \in Y.\ \exists x \in X.\ x > y \\ M >^1_{mult} N & \Leftrightarrow & \exists x \in M, Y \in \mathcal{M}(A). \\ & & N = (M - \{x\}) \cup Y \ \wedge \ \forall y \in Y.\ x > y \end{array}$$

zu zeigen: $(>^1_{mult})^+ = >_{mult}$

„$\subseteq$“ Sei $M_0\ (>^1_{mult})^+\ M_n$. Es gibt also Multimengen $M_1, \dots M_{n-1}$ mit

$$M_0 >^1_{mult} M_1 >^1_{mult} \cdots >^1_{mult} M_n$$

Zeige $M_0 >_{mult} M_n$ per Induktion über n.

$n = 1$**:** Aus der Voraussetzung $M_0 \ >^1_{mult} \ M_1$ ergibt sich unmittelbar $M_0 \ >_{mult} \ M_1$ indem man $X = \{x\}$ wählt.

$n \rightsquigarrow n+1$**:** Sei

$$M_0 >^1_{mult} M_1 >^1_{mult} \cdots >^1_{mult} M_n >^1_{mult} M_{n+1}.$$

Aus der Induktionsvoraussetzung ergibt sich $M_0 >_{mult} M_n$, also

$$M_n = (M_0 - X_0) \cup Y_0, \text{ mit } \forall y \in Y_0.\, \exists x \in X_0.\, x > y. \quad (*)$$

Ausserdem gilt die Voraussetzung $M_n >^1_{mult} M_{n+1}$, also

$$M_{n+1} = (M_n - \{x_1\}) \cup Y_1, \text{ mit } \forall y \in Y_1.\, x_1 > y. \quad (**)$$

1. Fall $x_1 \in Y_0$ **:** Es gilt

$$M_{n+1} = (M_0 - X_0) \cup (Y_0 - \{x_1\} \cup Y_1),$$

Wegen $(*)$ wissen wir, dass Y_0 von X_0 dominiert wird. Wegen $(*)$ und $x_1 \in Y_0$ gibt es ein $x' \in X_0$ mit $x' > x_1$, ausserdem gilt nach $(**)$ für alle $y \in Y_1.\, x_1 > y$. Mit Transitivität von $>$ erhalten wir also auch $x' > y$ für alle Elemente y aus Y_1.

2. Fall $x_1 \notin Y_0$**:** Es gilt

$$M_{n+1} = (M_0 - (X_0 \cup \{x_1\})) \cup (Y_0 \cup Y_1),$$

wobei x_1 die Elemente von Y_1 dominiert und Elemente aus X_0 die Elemente aus Y_0 dominieren.

„$\supseteq$“ Sei $M >_{mult} N$. Also gilt

$$N = (M - X) \cup Y, \text{ mit } \forall y \in Y.\, \exists x \in X.\, x > y.$$

Zeige $M(>^1_{mult})^+N$ mit Induktion über $n = |X|$.

$n = 1$**:** Es gilt $X = \{x\}$, also folgt $M >^1_{mult} N$.

$n \rightsquigarrow n+1$**:** Wähle ein $x_0 \in X$ und definiere die folgenden Multimengen:

$$\begin{aligned} X' &= X - \{x_0\} \\ Y' &= \{y \in Y | x_0 > y\} \\ Y'' &= Y - Y' \\ M' &= (M - X') \cup Y'' \end{aligned}$$

Damit gilt $M >_{mult} M'$ mit X' und Y'', wobei $|X'| = n$. Also gilt nach Induktionsvoraussetzung $M(>^1_{mult})^+M'$.
Ausserdem gilt $M' >^1_{mult} N$ mit $\{x_0\}$ und Y'. Wegen der Transitivität von $(>^1_{mult})^+$ folgt $M(>^1_{mult})^+N$.