Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Dr. Clemens Ballarin

Gleichungslogik und Lambda-Kalkül
Wintersemester 2007/08
Musterlösung zu Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Der Zustand der Urne wird durch ein paar natürlicher Zahlen (n, m) beschrieben. Dabei ist n die Anzahl der schwarzen und m die Anzahl der weissen Kugeln. Der Ablauf entspricht folgendem Reduktionssystem

$$
\begin{array}{l}
(n, m+1) \longrightarrow (n, m) \\
(n+1, m) \longrightarrow (n, m') \ (\text{mit } m' \geq m)
\end{array}
$$

Dieses terminiert, da es in lexikographischer Ordnung abnimmt.

Aufgabe 2

a) Das Programm terminiert für Eingaben $n > 0$ und $m > 0$. Wegen der Schleifenbedingung $m \neq n$ gilt während der Programmausführung immer $n > 0$ und $m > 0$. Das Programm terminiert, da das Paar (m, n) bezüglich der lexikographischen Ordnung in jedem Schleifendurchlauf echt kleiner wird:

$$
\begin{array}{llll}
(m, n) & >_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} & (m-n, n) & \text{wegen } m > m-n \\
(m, n) & >_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} & (m, n-m) & \text{wegen } n > n-m
\end{array}
$$

Alternativ kann man auch mit der Maßfunktion $\varphi(m, n) = m + n$ argumentieren.

b) Ähnliche Argumentation wie bei a) aber mit Paar (n, m):

$$
\begin{array}{llll}
(n, m) & >_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} & (n, m-n) & \text{wegen } m > m-n \\
(n, m) & >_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} & (m, n) & \text{wegen } n > m
\end{array}
$$

Alternativ kann man auch mit der Maßfunktion $\varphi(m, n) = m + 2 * n$ argumentieren.

c) Bei jedem Aufruf wird das Tripel der Parameter bzgl. der *reversen* lexikographischen Ordnung kleiner oder die Funktion terminiert, da kein rekursiver Aufruf vorliegt:

Argument	Argument des rekursiven Aufrufs	Reduktion
$(m, n, 0)$	kein rekursiver Aufruf	
$(m, 0, k+1)$	$(m+k, 1, k)$	$k+1 > k$
$(m, n+1, k+1)$	$(m+k, n, k+1)$	$k+1 = k+1, n+1 > n$
$(n, n+1, k+1)$	$(m+k, f(m+k, n, k+1), k)$	$k+1 > k$

Aufgabe 3

Die Ordnung $>$ ist auf $\mathbb{Q}$ nicht terminierend ($\forall x \in \mathbb{Q}.\ \exists y \in \mathbb{Q}.\ x > y$). Die Maßfunktion kann also nicht in der Form wie oben benutzt werden.

Die ggT-Berechnung terminiert trotzdem, da sich, wenn man $m, n \in \mathbb{Q}$ zuerst auf den gemeinsamen Hauptnenner erweitert, nur noch der Zähler der Brüche ändert, und zwar in der gleichen Weise, wie oben beschrieben. Die Programme berechnen dann für die Eingabe $m = \frac{a}{b}$ und $n = \frac{c}{d}$ den Wert

$$\frac{\mathrm{ggT}(ad, bc)}{bd}$$

Aufgabe 4

Definitionen:
$(a, b) >_{A\times B} (a', b') \Leftrightarrow a >_A a' \ \vee\ (a = a' \wedge b >_B b')$
$>$ total $\Leftrightarrow \forall a, b.\ a > b \ \vee\ b > a \ \vee\ a = b$

zu zeigen: $>_A$ total $\wedge >_B$ total $\Rightarrow >_{A\times B}$ total

Beweis 1: direkter Beweis.
Seien a, a', b, b' beliebig aber fest.
Zeige: $(a, b) >_{A\times B} (a', b')$ oder $(a', b') >_{A\times B} (a, b)$ oder $(a, b) = (a', b')$.

$>_A$ ist total, daher gilt: $a >_A a' \ \vee\ a' >_A a \ \vee\ a = a'$.
Fall 1: $a >_A a'$ und daher $(a, b) >_{A\times B} (a', b')$.
Fall 2: $a' >_A a$ und daher $(a', b') >_{A\times B} (a, b)$.
Fall 3: $a = a'$ $(*)$

Da $>_B$ total is gilt: $b >_B b' \ \vee\ b' >_B b \ \vee\ b = b'$.
Fall 3.1: $b >_B b'$ und daher mit $(*)$ auch $(a, b) >_{A\times B} (a', b')$.
Fall 3.2: $b' >_B b$ und daher mit $(*)$ auch $(a', b') >_{A\times B} (a, b)$.
Fall 3.3: $b = b'$ und daher mit $(*)$ auch $(a, b) = (a', b')$.

Beweis 2: mit Widerspruch.
Annahme $>_{A\times B}$ nicht total, $>_A$ total, $>_B$ total

$$\begin{aligned} >_{A\times B} \text{ nicht total } \Leftrightarrow \exists (a, b), (a', b').\ & \neg\ (a, b) >_{A\times B} (a', b') \wedge \\ & \neg\ (a', b') >_{A\times B} (a, b) \wedge \\ & \neg\ (a, b) = (a', b') \end{aligned}$$

$\neg\ (a, b) = (a', b') \Rightarrow a' \neq a \vee b \neq b'$

1. Fall: $a \neq a'$

$$\left.\begin{array}{lll} \neg\ (a, b) >_{A\times B} (a', b') & \Rightarrow & \neg\ (a >_A a') \\ \neg\ (a', b') >_{A\times B} (a, b) & \Rightarrow & \neg\ (a' >_A a) \end{array}\right\} \Rightarrow >_A \text{ nicht total. Widerspruch!}$$

2. Fall: $b \neq b'$ (und $a = a'$)

$$\left.\begin{array}{lll} \neg\ (a, b) >_{A\times B} (a', b') & \Rightarrow & \neg\ (b >_B b') \\ \neg\ (a', b') >_{A\times B} (a, b) & \Rightarrow & \neg\ (b' >_B b) \end{array}\right\} \Rightarrow >_B \text{ nicht total. Widerspruch!}$$

Aufgabe 5

Sei x_i das i-te Zeichen des Strings x.

Eine Maßfunktion $\varphi : \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$ ist z.B.:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{|x|} 2^{|x|-i} \cdot val(x_i) \quad \text{mit} \quad val('0') = 0 \quad val('1') = 1$$