

### Aufgabe 1 (H) ( $\lambda$ -Terme)

Werten Sie folgende Substitutionen aus:

a)  $(\lambda y.x(\lambda x.x)) [(\lambda y.xy)/x]$

b)  $(y(\lambda v.xv)) [(\lambda y.vy)/x]$

Formen Sie folgende Terme so um, dass sie vollständig geklammert und konform zu der  $\lambda$ -Kalkül-Grammatik aus der Vorlesung sind:

c)  $ux(yz)(\lambda v.vy)$

d)  $(\lambda xyz.xz(yz))uvw$

Formen Sie die folgenden Terme so um, dass sie minimal geklammert und nacheinanderstehende Abstraktionen zusammengefasst sind:

e)  $((u(\lambda x.(v(wx))))x)$

f)  $((((w(\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.((xz)(yz))))))u)v)$

### Aufgabe 2 (H) (*Substitutionslemma*)

Zeigen Sie, dass mit geeigneten Einschränkungen gilt:

$$s[t/x][u/y] = s[u/y][t[u/y]/x]$$

### Aufgabe 3 (Ü) (*Formalisierung mit $\lambda$ -Termen*)

Drücken Sie folgende Aussagen als  $\lambda$ -Terme aus. Sie können dabei  $D$  als Ableitungsoperator benutzen.

a) Die Ableitung von  $x^2$  ist  $2x$ .

b) Die Ableitung von  $x^2$  an der Stelle 3 ist 6.

c) Sei eine Funktion  $f$  gegeben und sei weiterhin  $g$  definiert als  $g(x) := f(x^2)$ . Die Ableitung von  $g$  an der Stelle  $x$  ist verschieden von der Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x^2$ .

d) Formulieren Sie die Aussage aus c) jetzt ohne Verwendung des Funktionssymbols  $g$ .

### Aufgabe 4 (P) ( $\lambda$ -Kalkül in Gofer)

Implementieren sie einen Interpreter ( $\beta$ -Reduktion) für das Lambda-Kalkül in Gofer. Die Vorlage `lambda.gs` finden Sie auf der Webseite der Übung.

Geben Sie den Quelltext und ein Ablaufprotokoll von Testläufen mit den Beispieldaten aus `lambda.gs` ab.