

In diesem Aufgabenblatt geht es vor allem um die Benutzung des Birkhoffschen Theorems aus dem sich die Äquivalenz aller eingeführten von E induzierten Relationen ergibt. Wir können also für unsere Argumentation die jeweils "passende" Relation auswählen:

$$s \longleftrightarrow_E^* t \iff E \vdash s \approx t \iff E \models s \approx t$$

Aufgabe 1 (H) (Äquivalenzklassen)

Seien $\Sigma = \{f, g\}$ und

$$E = \{f(f(x)) \approx f(x), g(f(x)) \approx f(x), f(g(x)) \approx g(x), g(g(x)) \approx g(x)\}$$

- Beschreiben Sie die \approx_E -Äquivalenzklassen.
- Bestimmen Sie zu jeder \approx_E -Äquivalenzklasse $[t]_{\approx_E}$ einen kürzesten Term \hat{t} in $[t]_{\approx_E}$.
- Geben Sie ein Modell für E an, das mehr als ein Element enthält.

Aufgabe 2 (Ü) (Konsistenz)

Eine Menge E von Gleichungen heisst *konsistent*, wenn sie ein Modell mit mehr als einem Element besitzt. Zeigen Sie folgende Aussagen:

- E ist genau dann inkonsistent, wenn $E \vdash x \approx y$ für zwei verschiedene Variablen x und y gilt.
- Enthält E eine Gleichung der Form $t \approx x$ mit $x \notin \text{Var}(t)$, dann ist E inkonsistent.
- Wenn es ein Modell von E mit zwei Elementen gibt, dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Modell von E mit 2^n Elementen. Hinweis: Betrachten Sie Paare.

Aufgabe 3 (Ü) (Kommutativität von +)

Seien $\Sigma = \{0, s, +\}$ und $E = \{x + 0 \approx x, x + s(y) \approx s(x) + y\}$.

- Zeigen Sie $E \models x + s(s(0)) \approx s(s(x))$ und $E \models s^i(0) + s^j(0) \approx s^j(0) + s^i(0)$.
- Zeigen Sie $E \not\models x + y \approx y + x$.

Hinweis: Geben Sie ein Modell an, in dem E gilt, die Kommutativität aber nicht.

(Fortsetzung auf der Rückseite)

Aufgabe 4 (H) (*Kongruenzhülle*)

Entscheiden Sie mit Hilfe der Kongruenzhülle, ob die Terme s und t bezüglich der Gleichungsmenge G äquivalent sind.

- a) Benutzen Sie den abstrakten Algorithmus auf Gleichungsmengen.

$$G = \{f(a, b) = a\}$$

i) $s = f(f(a, b), b), \quad t = a$

ii) $s = f(f(a, b), b), \quad t = b$

- b) Benutzen Sie die Graphendarstellung und den imperativen Algorithmus aus der Vorlesung. Geben Sie für jede bearbeitete Gleichung aus G die auftretenden Aufrufe von `merge` und `Union` und den resultierenden Graphen an.

$$G = \{f^3(a) = a, f^5(a) = a\}$$

i) $s = f(f(a)), \quad t = a$

ii) $s = f(a), \quad t = a$