

Aufgabe 1 (H) (*Komposition von Substitutionen*)

a) Geben Sie für die folgenden Paare von Substitutionen jeweils $\text{Dom}(\sigma\tau)$ und $\sigma\tau$ an, letzteres in der Form $\{x \mapsto \cdot, \dots\}$.

i) $\sigma = \{x \mapsto y\}, \tau = \{y \mapsto x\}$

ii) $\sigma = \{x \mapsto x + y\}, \tau = \{x \mapsto y\}$

iii) $\sigma = \{x \mapsto y\}, \tau = \{x \mapsto x + y\}$

b) Welche Bedingung über Domain und Variablenrange von σ und τ muss gelten, damit

i) $\sigma\tau = \tau$ ii) $\tau\tau = \tau$

Aufgabe 2 (H) (*Gruppen*)

Seien \circ ein binäres, \cdot^{-1} ein unäres, und e ein nullstelliges Funktionssymbol. Seien weiterhin folgende Identitäten gegeben:

$$G = \{x \circ (y \circ z) \approx (x \circ y) \circ z, e \circ x \approx x, x^{-1} \circ x \approx e\}$$

Zeigen Sie $x \circ e \xrightarrow{*}_G x$.

Aufgabe 3 (Ü) (*Instanzen*)

Sei $T(\Sigma, \{x\})$ die Menge der Σ -Terme über der einzigen Variable x . Sei weiterhin die Reduktionsrelation \longrightarrow_I auf $T(\Sigma, \{x\})$ wie folgt definiert: $s \longrightarrow_I t$ genau dann, wenn s eine Instanz von t ist, und $s \neq t$.

a) Zeigen Sie, dass \longrightarrow_I terminierend und konfluent ist.

b) Lässt sich dieses Ergebnis auf Reduktionssysteme mit mehr als einer Variablen verallgemeinern?

Aufgabe 4 (Ü) (*Multimengenordnung*)

Zu einer strikten Ordnung $(A, >)$ sei eine Einschnittvariante $(\mathcal{M}, >_{mult}^1)$ der Multimengenordnung $(\mathcal{M}, >_{mult})$ auf endlichen Multimengen wie folgt definiert:

$$M >_{mult}^1 N : \iff \exists x \in M, Y \in \mathcal{M}(A). N = (M - \{x\}) \cup Y \wedge \forall y \in Y. x > y$$

Zeigen Sie, dass die transitive Hülle von $>_{mult}^1$ genau die Multimengenordnung $>_{mult}$ aus der Vorlesung ist.