Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Dr. Clemens Ballarin

Gleichungslogik und Lambda-Kalkül
Wintersemester 2007/08
Übungsblatt 2
Besprechung am 5. November 2007

Aufgabe 1 (H) (*Terminierung*)

Beschreiben Sie folgenden Ablauf als Reduktionssystem, und zeigen Sie, dass er terminiert:

> Gegeben sei eine Urne mit schwarzen und weissen Kugeln. In jedem Schritt wird eine beliebige Kugel aus der Urne entnommen. Ist diese Kugel schwarz, kann eine beliebige, aber endliche Anzahl von weissen Kugeln in die Urne gelegt werden.

Aufgabe 2 (H) (*Terminierung*)

Zeigen Sie, dass die folgenden Programme, mit Variablen über den natürlichen Zahlen, für geeignete Eingaben terminieren.

a) ggT(m, n)

> **while** $m \neq n$ **do**
>   **if** $m > n$ **then** $m := m - n$ **else** $n := n - m$

b) ggT(m, n)

> **while** $m \neq n$ **do**
>   **if** $m > n$ **then** $m := m - n$
>   **else begin** $h := m;\ m := n;\ n := h$ **end**

c) Die Funktion f, die rekursiv wie folgt definiert ist.

$$\begin{aligned} f(m, n, 0) &= m + n \\ f(m, 0, k+1) &= f(m + k, 1, k) \\ f(m, n+1, k+1) &= f(m + k, f(m + k, n, k + 1), k) \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Ü) (*Terminierung*)

Was ändert sich bei den ggT-Berechnungen aus Aufgabe 2, wenn für n, m und h positive rationale Zahlen zugelassen werden?

Aufgabe 4 (Ü) (*Produktordnungen*)

Zeigen Sie: Das lexikographische Produkt $(A \times B, >_{A\times B})$ der Ordnungen $(A, >_A)$ und $(B, >_B)$ ist eine totale Ordnung, wenn $>_A$ und $>_B$ total sind.

Aufgabe 5 (Ü) (*Maßfunktion*)

Sei $(\{0,1\}^*, \longrightarrow)$ das Reduktionssystem zum Sortieren eines Strings über $\{0,1\}$ aus der Vorlesung mit der einzigen Reduktion $u1v0w \longrightarrow u0v1w$ und $u, v, w \in \{0,1\}^*$.

Geben Sie eine Maßfunktion $\varphi : \{0,1\}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ an, die zeigt, dass das Reduktionssystem terminiert.