

Übungen zur Vorlesung

„Grundlagen der Programm- und Systementwicklung“

Aufgabe 1 Signatur, Rechenstruktur, Modell

Wir betrachten im folgenden eine Rechenstruktur der booleschen Wahrheitswerte, gegeben durch die Sorte

sort Bool,

die Funktionssymbole **true**, **not**, **and**, und **or** mit der jeweiligen Funktionalität:

true : Bool
not : Bool → Bool
and, or : Bool×Bool → Bool

sowie einer Reihe von Axiomen zur Bildung von Termen:

and(**and**(**x**, **y**), **z**) = **and**(**x**, **and**(**y**, **z**)
and(**x**, **y**) = **and**(**y**, **x**)
not(**not**(**x**)) = **x**
or(**x**, **y**) = **not**(**and**(**not**(**x**), **not**(**y**)))
and(**x**, **not**(**x**)) = **not**(**true**)

- (a) Diskutieren Sie anhand dieser Spezifikation die Begriffe *Signatur*, *Algebra*, *Term*, *Rechenstruktur*, und *Modell*
- (b) Geben Sie ein Modell für diese Rechenstruktur an.
- (c) Hat diese Rechenstruktur weitere Modelle? Wann liegt ein eindeutiges Modell vor?

Aufgabe 2 Rechenstruktur der Sequenzen natürlicher Zahlen

Sequenzen (Listen) treten in vielfältiger Form in zahlreichen Anwendungen der Informatik auf. Wir betrachten in dieser Aufgabe Rechenstrukturen und Modelle für Sequenzen natürlicher Zahlen. Zu den wesentlichen Operationen auf Sequenzen gehören das Erzeugen, das Prüfen auf das Vorhandensein von Elementen, das Ermitteln des ersten bzw. des letzten Elements, sowie das Entfernen des ersten bzw. des letzten Elements einer Sequenz.

- (a) Geben Sie eine Signatur für Sequenzen an.
- (b) Geben Sie Axiome für die Rechenstruktur der Sequenzen über dieser Signatur an.
- (c) Ist \mathbb{N}^* ein Modell für diese Rechenstruktur?
- (d) Ist $S = \{s \in \mathbb{N}^* \mid \forall x, y \in \mathbb{N}^* \forall m, n \in \mathbb{N} : s = x \circ \langle m \rangle \circ \langle n \rangle \circ y \Rightarrow m \geq n\}$ ebenfalls ein Modell für die Rechenstruktur der Sequenzen?

Aufgabe 3 Rechenstruktur der Prioritätsschlangen

Prioritätsschlangen besitzen große Bedeutung bei der Verwaltung von Betriebsmitteln in vielen Anwendungen der Informatik; als Beispiele lassen sich die Zuteilung von Ressourcen in Betriebssystemen, die Signalisierung von Ausnahmezuständen in technischen Systemen, aber auch die Steuerung von Aufzugskabinen anführen.

- (a) Geben Sie eine Signatur für Prioritätsschlangen an.
- (b) Geben Sie je ein Modell für Prioritätsschlangen auf der Basis (1) geordneter und (2) beliebiger Sequenzen an.
- (c) Wann sind in den Modellen zwei Prioritätsschlangen gleich?
- (d) Geben Sie einen Homomorphismus von (2) nach (1) an.
- (e) Welches der beiden Modelle ist term erzeugt? Läßt sich ein nicht term erzeugtes Modell finden?
- (f) Diskutieren Sie Implementierungen der Prioritätsschlangen in Java auf Basis der Modelle (1) und (2).

Aufgabe 4 Initiale und Terminale Modelle

Gegeben sei eine Rechenstruktur mit der Sorte:

sort Nat

die Funktionssymbole **0**, und **succ** mit der jeweiligen Funktionalität:

0 : Nat ;
succ : Nat → Nat ;

sowie dem Axiom:

$$(\text{succ}(x) = \text{succ}(y)) \Rightarrow (x = y)$$

Weiterhin fordern wir, dass **Nat** term erzeugt ist.

- (a) Geben Sie Modelle für diese Rechenstruktur an.
- (b) Geben Sie ein Beispiel für einen Homomorphismus zwischen zwei dieser Modelle.
- (c) Diskutieren Sie die Begriffe „initiale“ und „terminale Modelle“ anhand dieser Spezifikation.
- (d) Nehmen wir als weiteres Axiom

$$\neg (\text{succ}(x) = 0)$$

hinzu, ergeben sich andere terminale Modelle; welche?